第一章　随机事件及其概率

练习一

1．设 A，B，C 是随机试验 E 的三个事件，试用 A，B，C 表示下列事件：

（1）A 与 B 不发生，而 C 发生；

$\bar{A}\bar{B}C$

（2）A，B，C 都不发生；

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

（3）A，B，C 至少有一个发生；

$A\cup B\cup C$

（4）A，B，C 中恰有一个发生；

$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$

（5）A，B，C 中恰有两个发生；

$AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$

（6）A，B，C 中至多有两个发生；

$\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$

（7）A，B，C 中至少有两个发生．

$AB\cup AC\cup BC$

2．设 A，B，C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(BC)=0$，$P(AB)=P(AC)=\frac{1}{8}$，求 A，B，C 都不发生的概率．

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=\frac{1}{2}$

3．设 A，B 是两个事件，且 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，试在下列三种情况下，求 $P(A\bar{B})$．

(1) $P(AB)=\frac{1}{8}$；

$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{3}-\frac{1}{8}=\frac{5}{24}$

(2) A，B 互不相容；

$AB=\Phi \Rightarrow P(AB)=0$

$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{3}$

(3) A，B 有包含关系.

$P(A) < P(B) \Rightarrow A \subset B$

$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) = 0$

4．设 A，B，C 是三个事件，且 $P(A)=0.7, P(B)=0.3, P(A-B)=0.5$，求 $P(A\cup B), P(\bar{A}B)$．

$P(A-B) = P(A) - P(AB) = 0.5 \Rightarrow P(AB) = 0.2$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.8$

$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = 0.3 - 0.2 = 0.1$

5．设随机事件 A、B 满足 $P(A)=P(B)=1/2$，$P(A\cup B)=1$，则必有 D

A. $A\cup B = S$　　　B. $AB = \Phi$

C. $P(A-B)=0$　　　D. $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \Rightarrow P(AB) = 0$

$\nRightarrow AB = \Phi$

例.

$S = \{1, 2, 3, \cdots\}$

$A = \{n \mid n \geq 3, 2\nmid n\}$　$B = \{n \mid n \geq 4, 2 \mid n\}$

6．设 A、B 为任意两个随机事件，则有 C

$A.\ P(AB) \leq P(A)P(B)$　　　$B.\ P(AB) \geq P(A)P(B)$

$C.\ P(AB) \leq \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$　　　$D.\ P(AB) \geq \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

$$\left.\begin{aligned} AB \subseteq A &\Rightarrow P(AB) \leq P(A) \\ AB \subseteq B &\Rightarrow P(AB) \leq P(B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2P(AB) \leq P(A) + P(B)$$

练习二

1．把 10 本不同的书任意放在书架上，求其中指定的 3 本书放在一起的概率.

记A={指定的三本书放在一起}

$$P(A)=\frac{A_8^8\times A_3^3}{A_{10}^{10}}=\frac{6}{9\times10}=\frac{1}{15}$$

2．在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章，任选 3 人记录其纪念章的号码.

求 (1) 求最小号码为 5 的概率；

记A={最小号码为5}

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$$

(2) 求最大号码为 5 的概率.　B={最大号码为5}

$$P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$$

3．某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶，黑漆 4 桶，红漆 3 桶，在搬运中所有标签脱落，交货人随意将这些发给顾客. 问一个订货白漆 10 桶，黑漆 3 桶，红漆 2 桶的顾客，能按所订颜色如数得到订货的概率是多少？

记A={能按所订颜色拿到货}

$$P(A)=\frac{C_4^3C_3^2}{C_{17}^{15}}=\frac{4\times3}{\frac{17\times16}{2}}=\frac{3}{34}$$

4．已知在 10 只晶体管中有 2 只是次品，在其中取两次，每次任取一只，作不放回抽样，求下列事件的概率：

（1）两只都是正品；

A={两只均为正品}

$$P(A)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}$$

(2) 两只都是次品;

B={两只均为次品}

$$P(B)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}$$

(3) 一只是正品，一只是次品;

C={一只是正品，一只是次品}

$$P(C)=\frac{C_8^1\times C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45}$$

(4) 第二次取出的是次品.　D={第二次取出的是次品}

$$\cancel{D=C_8^1C_2^1+2\times 1}$$

$$P(D)=\frac{C_8^1C_2^1+2\times 1}{A_{10}^2}=\frac{1}{5}$$

或 $P(D)=P(B)+\frac{1}{2}P(C)=\frac{1}{5}$

5. 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 B,C 分别是将一枚骰子接连抛掷两次先后出现的点数，求该方程有重根的概率.

记事件A={方程有重根}

$B^2=\{1,4,9,16,25,36\}$

$C=\{1,2,3,4,5,6\}$

$B^2=4C \Rightarrow (4,1),(16,4)$

$$P(A)=\frac{2}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{18}$$

练习三

1．(1) 已知 $P(\overline{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\overline{B})=0.5$, 求 $P(B|A\cup\overline{B})$．

$$P(B|A\cup\bar{B})=\frac{P[B\cap(A\cup\bar{B})]}{P(A\cup\bar{B})}=\frac{P[(B\cap A)\cup(B\cap\bar{B})]}{P(A\cup\bar{B})}$$

$$=\frac{P(AB)}{P(A\cup\bar{B})}$$

$$P(A\cup\bar{B})=P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})=0.7+0.6-0.5=0.8$$

$$P(AB)=P(A)-P(A\bar{B})=0.2 \Rightarrow P(B|A\cup\bar{B})=\frac{0.2}{0.8}=\frac{1}{4}$$

(2) 已知 $P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{2}$, 求 $P(A\cup B)$．

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3} \Rightarrow P(AB)=\frac{1}{12}$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2} \Rightarrow P(B)=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

2．假设患肺结核的人通过透视胸部能被确诊的概率为 0.95，而未患肺结核的人通过透视胸部被误诊为病人的概率为 0.002．根据以往资料表明，某单位职工患肺结核的概率为 0.001。现在该单位有一个职工经过透视被诊断为患肺结核，求这个人确实患肺结核的概率．

设A={~~此人色盲~~ 诊断有肺结核} B_1={此人患肺结核} B_2={此人不患肺结核}

$$\begin{cases} P(B_1)=0.001 \\ P(A|B_1)=0.95 \end{cases} \qquad \begin{cases} P(B_2)=0.999 \\ P(A|B_2)=0.002 \end{cases}$$

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)}$$

$$=\frac{0.001\times0.95}{0.001\times0.95+0.999\times0.002}\approx0.3223$$

3．已知男子有 5%是色盲患者，女子有 0.25%是色盲患者．今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人．

(1) 求此人是色盲患者的概率 ；

设A={此人色盲} B_1={此人为女性} B_2={此人为男性}

$$\begin{cases} P(B_1)=\frac{1}{2} \\ P(A|B_1)=0.25\% \end{cases} \qquad \begin{cases} P(B_2)=\frac{1}{2} \\ P(A|B_2)=5\% \end{cases}$$

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)$$

$$=0.2625$$

（2）若此人恰好是色盲患者，问此人是女性的概率是多少？

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}$$

$$=\frac{0.5\times0.25\%}{0.2625}=\frac{1}{21}$$

4．有两箱同类的零件，第一箱装 50 只，其中 10 只一等品；第二箱装 30 只，其中 18 只一等品．今从两箱中任挑一箱，然后从该箱中取零件两次，每次取一只，作不放回抽样．求

（1）第一次取到的零件是一等品的概率；

$A_1=\{$第一次取到一等品$\}$

$B_1=\{$取到第一箱$\}$　$B_2=\{$取到第二箱$\}$

$$\begin{cases}P(B_1)=0.5\\P(A_1|B_1)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}\end{cases}\qquad\begin{cases}P(B_2)=0.5\\P(A_1|B_2)=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}\end{cases}$$

$$P(A_1)=P(B_1)P(A_1|B_1)+P(B_2)P(A_1|B_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

（2）在第一次取到的零件是一等品的条件下，第二次取到的零件也是一等品的概率．

$A_2=\{$第二次取到一等品$\}$

$$\begin{cases}P(B_1)=\frac{1}{2} & P(B_2)=\frac{1}{2}\\P(A_1A_2|B_1)=\frac{A_{10}^2}{A_{50}^2} & P(A_1A_2|B_2)=\frac{A_{18}^2}{A_{30}^2}\end{cases}$$

$$P(A_1A_2)=P(B_1)P(A_1A_2|B_1)+P(B_2)P(A_1A_2|B_2)$$

$$\approx0.1942$$

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{0.1942}{0.4}\approx0.4835$$

练习四

1．设 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1$, 且 $P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1$，证明 A 与 B 相互独立.

2．设 A，B，C 是三个随机事件， 已知 A 与 C 互不相容，且 $P(AB)=1/2$, $P(C)=1/3$．试求 $P(AB|\overline{C})$．

3．口袋里装有 $a+b$ 枚硬币，其中 b 枚硬币是废品(两面都是国徽)．从口袋中随机地取出 1 枚硬币，并把它独立地抛 n 次，结果发现向上的一面全是国徽，试求这枚硬币是废品的概率．

$A=\{$向上的一面均为国徽$\}$

$B_1=\{$硬币是废品$\}$　　$P(B_2)=\{$硬币是正品$\}$

$$\begin{cases} P(B_1)=\dfrac{b}{a+b} & P(B_2)=\dfrac{a}{a+b} \\ P(A|B_1)=1 & P(A|B_2)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)}$$

$$=\frac{2^n b}{2^n b+a}$$

4． 设某工厂生产的每台仪器以概率 0.70 可以直接出厂；以概率 0.30 需要进一步调试，经调试后以概率 0.80 可以出厂，以概率 0.20 定为不合格品不能出厂．现在该厂生产了 $n\,(n\geq 2)$ 台仪器，求所有仪器都能出厂的概率．

$A_i=\{$第i台机器可以出厂$\}$　$B_1=\{$直接出厂$\}$　$B_2=\{$需进一步调试$\}$

$$\begin{cases} P(B_1)=0.7 & P(B_2)=0.3 \\ P(A_i|B_1)=1 & P(A_i|B_2)=0.8 \end{cases}$$

$$P(A_i)=P(B_1)P(A_i|B_1)+P(B_2)P(A_i|B_2)=0.94$$

$$P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

$$=0.94^n$$

5．已知甲盒中有 5 只红球、4 只白球，乙盒中有 5 只红球，5 只白球．先从甲盒中任取 2 只球放入乙盒中，然后再从乙盒中任取 1 只球．求第二次取出的球是白球的概率．

A = {第二次取出白球}

B_1 = {甲盒中取 2 只白球}　B_2 = {甲盒中取 1 红 1 白}

B_3 = {甲盒中取 2 只红球}

$$P(B_1) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{1}{6}, \quad P(B_2) = \frac{C_5^1 C_4^1}{C_9^2} = \frac{5}{9}, \quad P(B_3) = \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{5}{18}$$

$$P(A|B_1) = \frac{7}{12}, \quad P(A|B_2) = \frac{1}{2}, \quad P(A|B_3) = \frac{5}{12}$$

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

$$= \frac{1}{6}\times\frac{7}{12} + \frac{5}{9}\times\frac{1}{2} + \frac{5}{18}\times\frac{5}{12}$$

$$= \frac{53}{108}$$

第二章　随机变量及其分布

练习一

1. 一个袋内装有 6 个红球和 4 个白球，从中任取 3 个，设 X 为取到的红球的个数，求 X 的分布律.

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{5}{30}$

$$P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$$

$$P(X=1)=\frac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{9}{30}$$

$$P(X=2)=\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{15}{30}$$

$$P(X=3)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{5}{30}$$

2. 进行重复独立试验，设每次试验成功的概率为 $p(0<p<1)$，失败的概率为 $q=1-p$.

(1) 将试验进行到出现一次成功为止，以 X 表示所需的试验次数，求 X 的分布律；

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p,\quad k=1,2,\cdots$$

(2) 将试验进行到出现 r 次成功为止，以 Y 表示所需的试验次数，求 Y 的分布律.

$$P(Y=k)=C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{(k-1)-(r-1)}\cdot p$$

$$=C_{k-1}^{r-1}p^{r}q^{k-r},\quad k=r,r+1,\cdots$$

3. 一大楼装有 5 个同类型的供水设备. 调查表明在任一时刻 t 每个设备被使用的概率为 0.1，问在同一时刻

（1）恰有 2 个设备被使用的概率是多少？

$$P(X=2)=C_5^2\times0.1^2\times(1-0.1)^3=0.0729$$

（2）至多有 3 个设备被使用的概率是多少？

$$P(X\le3)=1-C_5^4\times0.1^4\times0.9-C_5^5\times0.1^5$$

$$\approx0.99954$$

（3）至少有 1 个设备被使用的概率是多少？

$P=1-0.9^5=1-0.59049$

$=0.40951$

4. 设南京市 110 每小时接到的呼叫次数服从参数 $\lambda=3$ 的泊松分布，求：（1）每小时恰有 5 次呼叫的概率；

$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$

$P(X=5)=\frac{3^5 e^{-3}}{5!}$ 0.1008

（2）一小时内呼叫不超过 5 次的概率．

$P(X\le 5)=\sum_{k=0}^{5}\frac{3^k e^{-3}}{k!}$ 0.9161

5．从学校乘汽车到火车站需要通过三个均设有信号灯的路口，每个信号灯之间是相互独立的，且红绿两种信号显示的时间分别为 $\frac{1}{3},\frac{2}{3}$，以 X 表示汽车首次停车时已通过的路口个数，求 X 的分布律及分布函数．

X	0	1	2	3
P_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$

$P(X=0)=\frac{1}{3}$

$P(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

$P(X=2)=(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$

$P(X=3)=(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$

X分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{3} & 0\le x<1\\ \frac{5}{9} & 1\le x<2\\ \frac{19}{27} & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$$

练习二

1．设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 1/4, & -1\le x<0\\ 3/4, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$，求随机变量 X 的概率分布律．

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2．设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \ln x & 1\le x<e\\ 1 & x\ge e\end{cases}$．

（1）求概率 $P\{X<2\}$；

$P(X<2)=P(X\le 2)=F(2)=\ln 2$

(注. 连续型随机变量每个点概率均为0)

（2）求概率 $P\{0<X\le 3\}$；

$P(0<X\le 3)=F(3)-F(0)=1$

（3）求概率 $P\{2<X<\frac{5}{2}\}$；

$P(2<X<\frac{5}{2})=F(\frac{5}{2})-F(2)$

$=\ln\frac{5}{2}-\ln 2=\ln\frac{5}{4}$

（4）求随机变量 X 的概率密度 $f_X(x)$．

$f_X(x)=F'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 1<x<e\\ 0, & 其它\end{cases}$

注. $F'_-(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{F(1+\Delta x)-F(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{0-\ln 1}{\Delta x}=0$ $\neq$ $F'(1)$不存在

$F'_+(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{F(1+\Delta x)-F(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\ln(1+\Delta x)-\ln 1}{\Delta x}=1$

3．向某一目标发射炮弹，设弹着点到目标的距离（单位：米）X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1250}xe^{-\frac{x^2}{2500}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

如果弹着点到目标的距离小于 50 米时，即可以摧毁目标．现在向这一目标

连发两枚炮弹，求目标被摧毁的概率.

记A={目标被摧毁}

~~P(A)=P~~ $P(X\le 50)=F(50)$ ~~$=1-e^{-1}$~~

$=\int_{-\infty}^{50} f(x)dx=\int_0^{50}\frac{x}{1250}e^{-\frac{x^2}{2500}}dx$

$=\int_0^{50}e^{-\frac{x^2}{2500}}d\frac{x^2}{2500}=1-e^{-1}$

$\Rightarrow P(X>50)=e^{-1}$

$\Rightarrow P(A)=1-(e^{-1})^2=1-e^{-2}$

4．设随机变量 X 在 $[2,5]$ 上服从均匀分布，现在对 X 进行三次独立观测，试求至少有一次观测值大于 3 的概率.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ \frac{x-2}{5-2}, & 2\le x<5\\ 1, & x\ge 5\end{cases}$$

$P(X\le 3)=F(3)=\frac{1}{3}$

记A={至少有一次观测值大于3}

$P(A)=1-(\frac{1}{3})^3=\frac{26}{27}$

5．设某类日光灯管的使用寿命 X 服从参数 $\lambda=1/3000$ 的指数分布（单位：小时）.

（1）任取一根这种灯管，求能正常使用 3000 小时以上的概率；

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$P(X>3000)=1-F(3000)$

$=1-(1-e^{-1})=e^{-1}$

（2）有一根这种灯管，已经正常使用了 1000 小时，求还能使用 2000 小时以上的概率.

记A={灯管正常使用1000小时}

B={灯管正常使用~~3000~~小时}

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1-F(3000)}{1-F(1000)}=\frac{e^{-1}}{e^{-\frac{1}{3}}}=e^{-\frac{2}{3}}$

注 指数分布无记忆性.

$P(X>3000\mid X>1000)=P(X>2000)$

$=1-F(2000)=e^{-\frac{2}{3}}$

练习三

1．设随机变量 $X\sim N(3,2^2)$，

(1) 求 $P(-4<X<10)$，$P(|X|\ge 2)$；

$Y=\frac{X-3}{2}\sim N(0,1)$

$P(-4<X<10)=P(-\frac{7}{2}<Y<\frac{7}{2})=2\Phi(\frac{7}{2})-1\approx 0.9996$

$P(|X|\ge 2)=P(X\ge 2)+P(X\le -2)=P(Y\ge -\frac{1}{2})+P(Y\le -\frac{5}{2})$

$=1-\Phi(-\frac{1}{2})+\Phi(-\frac{5}{2})=\Phi(\frac{1}{2})+1-\Phi(\frac{5}{2})=0.6977$

（2）确定 c 使得 $P(X>c)=P(X\le c)$；

$P(Y>\frac{c-3}{2})=P(Y\le\frac{c-3}{2})$

又：$\Phi(0)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{c-3}{2}=0\Rightarrow c=3$

（3）设 d 满足 $P(X>d)\ge 0.9$，问 d 至多为多少？

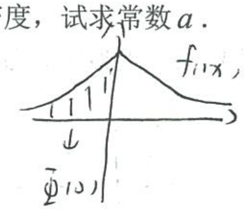
$P(Y>\frac{d-3}{2})\ge 0.9$

$\Rightarrow\Phi(\frac{d-3}{2})\le 0.1\longrightarrow d-3<0$

$\Rightarrow\Phi(\frac{3-d}{2})\ge 0.9$

查表 $\frac{3-d}{2}\ge 1.29\Rightarrow d\le 0.42$

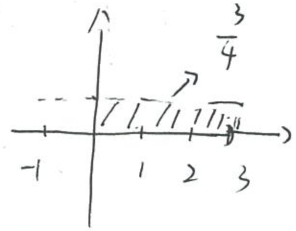
2．设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为(-1, 3)上均匀分布的概率密度．若 $f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\le 0,\\ f_2(x), & x>0.\end{cases}$ $(a>0)$ 为概率密度，试求常数 a．



$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

$\Rightarrow\int_{-\infty}^{0}af_1(x)dx+\int_0^3 f_2(x)dx$

$=a\Phi(0)+\frac{3}{4}=1$



$\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

3. 假设考生的数学成绩服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，已知平均成绩 $\mu=72$ 分，96 分以上的考生占考生总数的 2.3%. 试求考生的数学成绩在 60 分至 84 分之间的概率．(已知 $\Phi(1)=0.841,\Phi(2)=0.977$)

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

$P(X>96)=P(Y>\frac{24}{\sigma})=1-P(Y\le\frac{24}{\sigma})$

$=1-\Phi(\frac{24}{\sigma})=0.023$

$\Rightarrow\Phi(\frac{24}{\sigma})=0.977\Rightarrow\frac{24}{\sigma}=2\Rightarrow\sigma=12$

$\therefore P(60<X<84)=P(-1<Y<1)=2\Phi(1)-1$

$=0.682$

4．设随机变量 X 的概率分布律为

X	-2	-1	0	1	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

，求随机变量 $Y=X^2$ 的概率分布律．

Y	0	1	4	9
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

5．设随机变量 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，求随机变量 $Y=e^X$ 的概率密度．

法一：$X\sim U(0,1)$　$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

当 $y\le 1$ 时，$F_Y(y)=0$，当 $y\ge e$ 时，$F_Y(y)=1$

当 $1<y<e$ 时

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=P(X\le \ln y)=F_X(\ln y)$

$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 1<y<e\\ 0, & 其它\end{cases}$

法二：$h(y)=\ln y$，$h'(y)=\frac{1}{y}$，$g(x)=e^x$，$g'(x)>0$，$\alpha=1$，$\beta=e$

当 $1<y<e$ 时，$f_Y(y)=f_X[h(y)]\,|h'(y)|=\frac{1}{y}$

$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 1<y<e\\ 0, & 其它\end{cases}$

6．设随机变量 $X\sim N(0,1)$，求随机变量 $Y=|X|$ 的概率密度．

$X\sim N(0,1)$，$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$

当 $y>0$ 时，

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)=P(-y\le X\le y)=F_X(y)-F_X(-y)$

$F_Y'(y)=f_X(y)+f_X(-y)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$

7．设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$，求随机变量 $Y=X^2$ 的概率密度．

当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$

当 $y>0$ 时，

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le \sqrt{y})$

$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})$

$F_X'(\sqrt{y})=\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}$

$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$

第三章 多维随机变量及其分布

练习一

1. 设某口袋装有 2 只黑球、2 只白球和 3 只蓝球。在该口袋中任取 2 只球。记 X 为取到黑球的只数，Y 为取到白球的只数。

(1) 求随机变量 (X, Y) 的概率分布律；

$$P(X=i, Y=j) = \frac{C_2^i C_2^j C_3^{2-i-j}}{C_7^2}, \quad i,j=0,1,2,\ 0 \le i+j \le 2$$

分布律：

X \ Y	0	1	2	P_i
0	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{10}{21}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{21}$	0	$\frac{10}{21}$
2	$\frac{1}{21}$	0	0	$\frac{1}{21}$
P_j	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{1}{21}$	

(2) 求随机变量 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布律；

X	0	1	2
P	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{1}{21}$

Y	0	1	2
P	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{1}{21}$

(3) 求概率 $P(X+Y \ge 2)$。

$$P(X+Y \ge 2) = P(X+Y=2)$$
$$= P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=0) + P(X=0, Y=2)$$
$$= \frac{4}{21} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21}$$
$$= \frac{2}{\ }$$

2. 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度

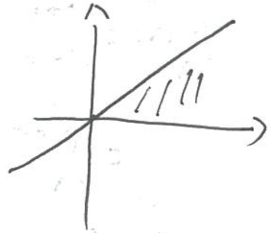
$$f(x,y) = \begin{cases} axye^{-(x+y)}, & x \ge 0, y \ge 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}。$$

（1） 求常数 a；

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$
$$\int_0^{+\infty} a y e^{-y}\left(\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx\right) dy = 1$$
$$a \underbrace{\int_0^{+\infty} y e^{-y}\,dy}_{=1} = 1 \Rightarrow a = 1$$

注：
$$\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx = -\int_0^{+\infty} x\,de^{-x} = -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$$

（2）求概率 $P(X > 2Y)$。



$$P(X>2Y) = \int_0^{+\infty} dy \int_{2y}^{+\infty} xy e^{-(x+y)}\,dx$$
$$= \int_0^{+\infty} y \cdot e^{-y}(2ye^{-2y} + e^{-2y})\,dy$$
$$= \int_0^{+\infty} (2y^2 e^{-3y} + y e^{-3y})\,dy$$
$$= 2\int_0^{+\infty} y^2 e^{-3y}\,dy + \frac{1}{9}\int_0^{+\infty} 3y e^{-3y}\,d(3y)$$
$$\overset{3y=t}{=} 2\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{9} e^{-t} \cdot \frac{1}{3}\,dt + \frac{1}{9}\Gamma(2)$$
$$= \frac{2}{27}\Gamma(3) + \frac{1}{9}$$
$$= \frac{4}{27} + \frac{1}{9}$$
$$= \frac{7}{27}$$

注：$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$

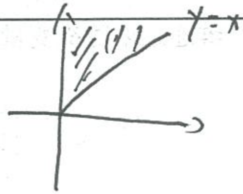
$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$\Gamma(n+1) = n!$

$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$

3．设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



求随机变量 (X,Y) 关于 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$。

当 $x\le 0$ 时

$f_X(x)=0$

当 $x>0$ 时，

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

$=\int_{x}^{+\infty} e^{-y}\,dy = e^{-x}$

$\therefore f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

当 $y\le 0$ 时，$f_Y(y)=0$

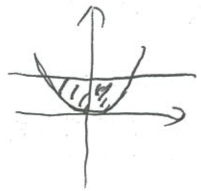
当 $y>0$ 时，

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_0^y e^{-y}\,dx = ye^{-y}$

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

4．设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}cx^2y, & x^2<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



(1) 确定常数 c；

$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} cx^2y\,dy\,dx=1$

$\int_{-1}^{1}\frac{c}{2}x^2(1-x^4)\,dx=1$

$\Rightarrow c=\frac{21}{4}$

(2) 求随机变量 (X,Y) 关于 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$。

当 $x^2\ge 1$ 时，$f_X(x)=0$

当 $-1<x<1$ 时，

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2y\,dy$

$=\frac{21}{8}x^2(1-x^4)$

$\therefore f_X(x)=\begin{cases}\frac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

当 $y\le 0$ 时 $y\ge 1$ 时，$f_Y(y)=0$

当 $0<y<1$ 时

$f_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2y\,dx=\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}$

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

练习二

1．设随机变量 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，已知在 $X=x\ (0<x<1)$ 的条件下，随机变量 Y 在 $(0,x)$ 上服从均匀分布．

1）求 (X,Y) 的概率密度函数；

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$f(x,y)=f_X(x)\,f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

2）求随机变量 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$．

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

$$=\begin{cases}\int_y^1 \frac{1}{x}\,dx, & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\ln y=\ln\frac{1}{y}, & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

2．设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2	p_j
-1	1/15	q	1/5	$q+\frac{4}{15}$
1	p	1/5	3/10	$p+\frac{1}{2}$
p_i	$p+\frac{1}{15}$	$q+\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	

且随机变量 X 与 Y 相互独立，求 p 与 q 的值．

$$P(X=2,Y=-1)=P(X=2)P(Y=-1)$$

$$\text{i.e.}\quad \frac{1}{5}=\frac{1}{2}\left(q+\frac{4}{15}\right)$$

$$q=\frac{2}{15}$$

$$P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)$$

$$\text{i.e.}\quad \frac{1}{5}=\left(q+\frac{1}{5}\right)\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(p+\frac{1}{2}\right)$$

$$p=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$$

3．设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

(1) 求随机变量 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；

当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，$f_X(x)=0$

当 $-1\le x\le 1$ 时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\,dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x|\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

同理

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & |y|\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(2) 判断随机变量 X 与 Y 是否相互独立？

$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$

$\Rightarrow X, Y$ 不独立

4．设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，令

$$X_1=\begin{cases}1, & Y\ge \ln 2\\ 0, & Y<\ln 2\end{cases}\qquad X_2=\begin{cases}1, & Y\ge \ln 3\\ 0, & Y<\ln 3\end{cases}$$

(1) 求二维随机变量 (X_1, X_2) 的联合概率分布律；

$$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

$P(X_1=0, X_2=0)=P(Y<\ln 2)=F(\ln 2)=\frac{1}{2}$

$P(X_1=0, X_2=1)=P(\varnothing)=0$

$P(X_1=1, X_2=0)=P(\ln 2\le Y<\ln 3)=F(\ln 3)-F(\ln 2)=\frac{1}{6}$

$P(X_1=1, X_2=1)=P(Y\ge \ln 3)=1-F(\ln 3)=\frac{1}{3}$

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	$\frac{1}{2}$	0
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

(2) 判断随机变量 X_1 与 X_2 是否相互独立？

X_1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

X_2	0	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$0=P(X_1=0, X_2=1)\ne P(X_1=0)P(X_2=1)=\frac{1}{6}$

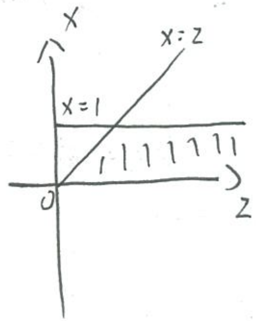
$\Rightarrow X_1, X_2$ 不独立

练习三

1．设 X 和 Y 是相互独立的随机变量，且 X 与 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$。



$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx$$

由 f_X, f_Y 定义知，仅当

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ z-x>0\end{cases} 即 \begin{cases}0\le x\le 1\\ x<z\end{cases}$$

时，上述积分的被积函数不为0

由上图知

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z f_X(x)f_Y(z-x)\,dx=\int_0^z e^{-(z-x)}\,dx, & 0<z<1\\ \int_0^1 f_X(x)f_Y(z-x)\,dx=\int_0^1 e^{-(z-x)}\,dx, & z\ge 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

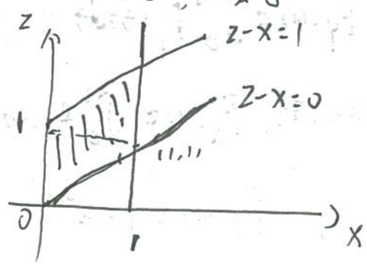
$$f_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, & 0<z<1\\ (e-1)e^{-z}, & z\ge 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

2．设 X 和 Y 是相互独立的随机变量，且都在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$。

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

被积函数不为0的区域

$$\begin{cases}0<x<1\\ 0<z-x<1\end{cases}$$



当 $z<0$ 或 $z\ge 2$ 时，$f_Z(z)=0$

当 $0<z<1$ 时

$$f_Z(z)=\int_0^z 1\,dx=z$$

当 $1\le z<2$ 时

$$f_Z(z)=\int_{z-1}^1 1\,dx=2-z$$

从而得到

$$f_Z(z)=\begin{cases}z, & 0<z<1\\ 2-z, & 1\le z<2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

3．设 X 和 Y 是相互独立的随机变量，且 $X\sim B(n_1,p), Y\sim B(n_2,p)$ 证明：

随机变量 $Z=X+Y\sim B(n_1+n_2,p)$。

$$P(Z=i)=P(X+Y=i)$$
$$=\sum_{k=0}^{i}P(X=k)P(Y=i-k)$$
$$=\sum_{k=0}^{i}C_{n_1}^{k}p^k(1-p)^{n_1-k}C_{n_2}^{i-k}p^{i-k}(1-p)^{n_2-(i-k)}$$
$$=p^i(1-p)^{n_1+n_2-i}\sum_{k=0}^{i}C_{n_1}^{k}C_{n_2}^{i-k}$$

$$\sum_{k=0}^{i}C_{n_1}^{k}C_{n_2}^{i-k}=C_{n_1+n_2}^{i}$$

n_1+n_2 个产品，n_1 个合格品，取 i 个产品，其中有 k 个合格品的所有可能性

$$P(Z=i)=C_{n_1+n_2}^{i}p^i(1-p)^{n_1+n_2-i}$$

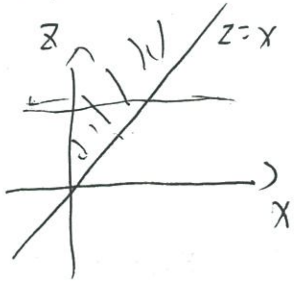
$$\therefore Z=X+Y\sim B(n_1+n_2,p)$$

4．设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试验证 $Z=X+2Y$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\begin{cases}ze^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$

法一、由卷积公式　$\begin{cases}x=x\\ y=\frac{1}{2}(z-x)\end{cases}$



$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f[x,y(x,z)]\left|\frac{\partial y}{\partial z}\right|dx$

被积函数不为0的区域

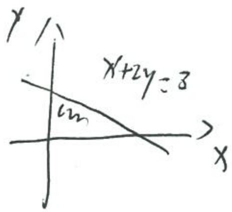
$\begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>0\\ z-x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>0\\ z>x\end{cases}$

$\Rightarrow$ 当 $z\le 0$ 时，$f_Z(z)=0$

当 $z>0$ 时，$f_Z(z)=\int_0^z e^{-z}dx=ze^{-z}$

法二、$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+2Y\le z)$

$=\iint_{x+2y\le z} f(x,y)dxdy$



5. $z\le 0$ 时　$F_Z(z)=0$

$z>0$ 时　$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-(x+2y)}dy$

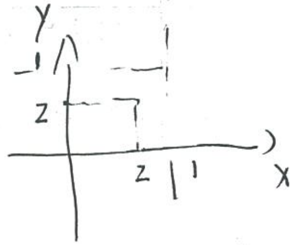
$=1-e^{-z}-ze^{-z}$

$\Rightarrow f_Z(z)=\begin{cases}ze^{-z}, & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$

5．设随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0<x<1,\ 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},$$

试求 $M=\max(X,Y)$ 的概率密度函数.



$F_M(z)=P(X\le z, Y\le z)$

$=\iint_{x\le z,\,y\le z\ 区域} f(x,y)dxdy$

$=\begin{cases}0 & z\le 0\\ \int_0^z\int_0^z (x+y)dxdy & 0<z<1\\ \int_0^1\int_0^1 (x+y)dxdy & z\ge 1\end{cases}$

$=\begin{cases}0 & z\le 0\\ z^3 & 0<z<1\\ 1 & z\ge 1\end{cases} \Rightarrow f_M(z)=\begin{cases}3z^2, & 0<z<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

第四章　随机变量的数字特征

练习一

1．设在某一规定的时间间隔里，某电气设备用于最大负荷的时间 X（以分计）是一个随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1500^2}x & 0\le x\le 1500\\[2mm] \dfrac{-1}{1500^2}(x-3000) & 1500<x\le 3000\\[2mm] 0 & \text{其它}\end{cases}$$

试求随机变量 X 的数学期望 $E(X)$．

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{1500}x\cdot\frac{x}{1500^2}dx+\int_{1500}^{3000}x\cdot\frac{-1}{1500^2}(x-3000)dx$

$=\frac{1}{1500^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{1500}-\frac{1}{1500^2}\left(\frac{x^3}{3}-1500x^2\right)\Big|_{1500}^{3000}$

$=500+1000$

$=1500$

2．设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
p	0.4	0.3	0.3

，试求 $E(X^2),E(3X^2+5)$．

解：$E(X^2)=(-2)^2\times0.4+0\times0.3+4\times0.3=2.8$

$E(3X^2+5)=3E(X^2)+5=13.4$

3．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$。

（1）求随机变量 X 的数学期望；

解：(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=1$

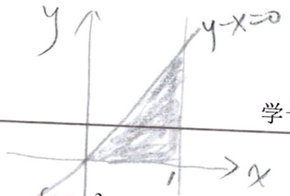
（2）求随机变量 $Y=2X$ 的数学期望；

$E(Y)=E(2X)=2E(X)=2$

（3）求随机变量 $Z=e^{-5X}$ 的数学期望．

$E(Z)=E(e^{-5X})=\int_0^{+\infty}e^{-5x}\cdot e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-6x}=\frac{1}{6}$

$\boxed{E(g(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx}$



4．设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}12y^2 & 0\le y\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，

试求 $E(X),E(XY),E(X^2+Y^2)$．

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\,dxdy=\int_0^1\left(\int_0^x x\cdot 12y^2dy\right)dx$

$=\int_0^1 (x\cdot 4y^3)\Big|_0^x\,dx=\int_0^1 4x^4dx=\frac{4}{5}$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)=\int_0^1\left(\int_0^x xy\cdot 12y^2dy\right)dx$

$=\int_0^1\left(x\cdot 3y^4\Big|_0^x\right)dx=\int_0^1 3x^5dx=\frac{1}{2}$

$E(X^2+Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)f(x,y)=\int_0^1\left(\int_0^x(x^2+y^2)\cdot 12y^2dy\right)dx$

$=\int_0^1\left(4x^2y^3+\frac{12}{5}y^5\right)\Big|_0^x\,dx$

$=\int_0^1\frac{32}{5}x^5dx=\frac{16}{15}$

5．设随机变量 X_1,X_2 的概率密度分别为

$$f_1(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}4e^{-4x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

（1）求 $E(X_1+X_2)$；

解：$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$

$E(X_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot 2e^{-2x}dx=\frac{1}{2}$

$E(X_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_2(x)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot 4e^{-4x}dx=\frac{1}{4}$

故 $E(X_1+X_2)=\frac{3}{4}$

（2）又设 X_1 与 X_2 相互独立，求 $E(X_1X_2)$．

若 X_1 与 X_2 独立 则 $E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2)=\frac{1}{8}$

练习二

1．设某台设备由 4 个元件所组成．在设备运转中，这 4 个元件需要调整的概率分别为 0.10、0.20、0.30、0.20 ．假设这 4 个元件是否需要调整是相互独立的，以 X 表示同时需要调整的元件数，试求 X 的数学期望和方差．

解．令 $X_i=\begin{cases}1 & 元件i需调整\\ 0 & 否则\end{cases}$　$i=1,2,3,4$

由题知 ~~$P(X=1)=0.1$~~ $X_1\sim B(1,0.1)$　$X_2\sim B(1,0.2)$　$X_3\sim B(1,0.3)$　$X_4\sim B(1,0.2)$

则 $X=\sum_{i=1}^{4}X_i$

$E(X)=E(\sum_{i=1}^{4}X_i)=\sum_{i=1}^{4}E(X_i)=0.1+0.2+0.3+0.4=1$

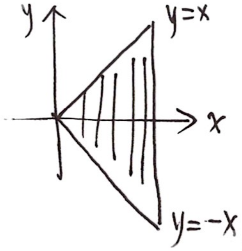
由于 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立．则 $D(X)=D(\sum_{i=1}^{4}X_i)=\sum_{i=1}^{4}D(X_i)$

$=1\times0.1\times0.9+1\times0.2\times0.8+1\times0.3\times0.7+1\times0.2\times0.8$

$=0.62.$

2．设二维连续型随机变量 (X,Y) 在区域 D: $0<x<1,-x<y<x$ 内服从均匀分布．

（1）写出随机变量 (X,Y) 的概率密度函数；



解：$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ -x<y<x\\ 0. & 其他.\end{cases}$

（2）求随机变量 $Z=2X+Y$ 的数学期望及方差．

$E(Z)=E(2X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(2x+y)f(x,y)\,dx\,dy$

$=\int_0^1\left(\int_{-x}^{x}(2x+y)\cdot1\,dy\right)dx=\int_0^1\left(2xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{-x}^{x}dx$

$=\int_0^1 4x^2dx=\frac{4}{3}$

$E(Z^2)=E(4X^2+4XY+Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(4x^2+4xy+y^2)f(x,y)\,dx\,dy$

$=\int_0^1\left(\int_{-x}^{x}(4x^2+4xy+y^2)dy\right)dx=\int_0^1\left(4x^2y+2xy^2+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-x}^{x}dx$

$=\int_0^1\frac{26}{3}x^3dx=\frac{13}{6}$

$D(Z)=E(Z^2)-E(Z)^2=\frac{7}{18}$

3．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & 0\le x\le\pi\\ 0 & 其它\end{cases}$，对 X 独立地重复观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，求随机变量 Y^2 的数学期望．

解：由题知 $Y\sim B(4,p)$　$p=P(X>\frac{\pi}{3})=\int_{\frac{\pi}{3}}^{+\infty}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}$

$D(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2$

故 $E(Y^2)=D(Y)+E(Y)^2=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\left(4\times\frac{1}{2}\right)^2=5$

4．设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X \sim N(720,30^2), Y \sim N(640,25^2)$.

(1) 求随机变量 $Z = 2X + Y$ 的分布；

解：$E(2X+Y)=2E(X)+E(Y)=2\times 720+640=2080$

$D(2X+Y)=4D(X)+D(Y)=4\times 30^2+25^2=4225$

由于 X、Y 独立. 则 $2X+Y \sim N(2080,4225)$

(2) 求概率 $P(X > Y)$；

$P(X>Y)=P(Y-X<0)$

$E(Y-X)=E(Y)-E(X)=640-720=-80$

$D(Y-X)=D(Y)+D(X)=30^2+25^2=1525$

由于 X、Y 独立 则 $Y-X \sim N(-80,1525)$

$P(X>Y)=P(Y-X<0)=\Phi\left(\frac{0-(-80)}{\sqrt{1525}}\right)=\Phi\left(\frac{80}{5\sqrt{61}}\right)\approx 0.9798$

(3) 求概率 $P(X + Y > 1400)$.

由于 X、Y 独立 则 $X+Y \sim N(1360,1525)$

$P(X+Y>1400)=1-P(X+Y\leq 1400)$

$=1-\Phi\left(\frac{1400-1360}{\sqrt{1525}}\right)$

$=1-\Phi\left(\frac{40}{5\sqrt{61}}\right)$

≈ 0.1539

练习三

1．设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为：

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/8$	$1/8$
0	$1/8$	0	$1/8$
1	$1/8$	$1/8$	$1/8$

试证明：X与Y是不相关的，但X与Y不是相互独立的.

证明 (1) 判断相关性：$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$E(XY)=(-1)\times(-1)\times\frac{1}{8}+(-1)\times 0\times\frac{1}{8}+\cdots+1\times1\times\frac{1}{8}=0.$

X的分布律为

X	-1	0	1
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$

则 $E(X)=0.$

故 $Cov(X,Y)=0$.

$\Rightarrow \rho_{XY}=0$，故X与Y不相关.

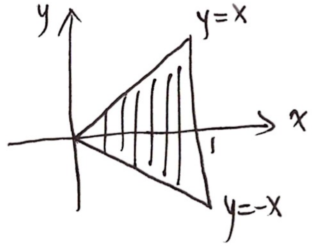
(2) 判断独立性：

Y	-1	0	1
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$

$P(X=-1,Y=-1)=\frac{1}{8}\neq P(X=-1)P(Y=-1)=\frac{9}{64}$ 故X,Y不独立.

2．设二维连续型随机变量(X,Y)在区域D：$0<x<1,-x<y<x$内服从均匀分布，计算$E(X)$,$Cov(X,Y)$.

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1 \quad -x<y<x\\ 0 & 其他\end{cases}$$



$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_{-x}^{x}x\,dx\,dy=\frac{2}{3}$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\,f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_{-x}^{x}y\,dx\,dy=0$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\,f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_{-x}^{x}xy\,dx\,dy=0.$

故 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

3．设随机变量(X,Y)的协方差矩阵为$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$，求$X_1=X-2Y$与$X_2=2X-Y$的相关系数.

解：由题知：$D(X)=1$　$D(Y)=4$　$Cov(X,Y)=1$.

$Cov(X_1,X_2)=Cov(X-2Y,2X-Y)=Cov(X,2X-Y)-2Cov(Y,2X-Y)$

$=2Cov(X,X)-Cov(X,Y)-4Cov(Y,X)+2Cov(Y,Y)$

$=2D(X)-5Cov(X,Y)+2D(Y)$

$=2\times1-1-4\times1+2\times4=5$

$D(X_1)=D(X-2Y)=D(X)+4D(Y)-4Cov(X,Y)=1+4\times4-4\times1=13$

$D(X_2)=D(2X-Y)=4D(X)+D(Y)-4Cov(X,Y)=4\times1+4-4=4$

$\rho_{X_1X_2}=\dfrac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}}=\dfrac{5}{\sqrt{13}\sqrt{4}}=\dfrac{5}{2\sqrt{13}}$

4．设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$， $x\in R$．

（1）问 X 与 $|X|$ 是否相关？为什么？

解：(1) 不相关.

$Cov(X,|X|)=E(X|X|)-E(X)E(|X|)$

$E(X|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot|x|\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0$

$Cov(X,|X|)=0-0=0$

故 X 与 $|X|$ 不相关.

（2）问 X 与 $|X|$ 是否独立？为什么？

用分布函数 联合分布函数＝边缘分布函数之积 去判断

$P(X\le a,|X|\le a)=P(|X|\le a)\neq P(|X|\le a)P(X\le a)$

故 X 与 $|X|$ 不独立.

5．已知 $D(X)=4, D(Y)=9, D(X-Y)=17$，试求：

（1）协方差 $Cov(X,Y)$；

解：(1) $D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)$

$=4+9-2Cov(X,Y)=17$

$\Rightarrow Cov(X,Y)=-2$

（2）相关系数 ρ_{XY}；

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-2}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}}=-\frac{1}{3}$

（3）互协方差 $Cov(X-2Y,X+Y)$．

解：$Cov(X-2Y,X+Y)$.

$=Cov(X,X)+Cov(X,Y)-2Cov(X,Y)-2Cov(Y,Y)$

$=D(X)-Cov(X,Y)-2D(Y)$

$=4-(-2)-2\times9=-12$

4．有一批建筑房屋用的木柱，其中 80% 的长度不小于 3m，现从这批木柱中随机地取出 100 根，问其中至少有 30 根短于 3m 的概率是多少？

用X表示100根木柱中短于3m的根数

$X \sim B(100, 0.2)$，$E(X) = np = 20$

$D(X) = np(1-p) = 16$

$P(X \geq 30) = 1 - P(X < 30)$

$= 1 - P\left(\frac{X-20}{4} < \frac{30-20}{4}\right)$

$= 1 - \Phi(2.5)$

$= 0.0062$

5．计算器在进行加法时，将每个加数舍入最靠近它的整数。设所有的舍入误差是独立的，且在 $(-0.5, 0.5)$ 上服从均匀分布。

（1）若将 1500 个数相加，问误差总和的绝对值超过 15 的概率是多少？

用X表示总误差，X_i表示每个数误差。

$E(X_i) = 0$，$D(X_i) = \frac{1}{12}$，$X = X_1 + \cdots + X_n$

$E(X) = 0$，$D(X) = 125$

$P(|X| > 15) = 1 - P(|X| \leq 15)$

$= 1 - P\left(\left|\frac{X-0}{\sqrt{125}}\right| \leq \frac{15}{\sqrt{125}}\right)$

$= 1 - (2\Phi(1.34) - 1) = 0.18024$

（2）最多可以有几个数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.90？

设有n个数相加

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

$E(X) = 0$，$D(X) = \frac{n}{12}$

$P(|X| < 10) = P\left(\frac{|X-0|}{\sqrt{\frac{n}{12}}} < \frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right)$

$= 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) - 1 \geq 0.9$

$\Rightarrow \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) \geq 0.95 = \Phi(1.645)$

$\Rightarrow n \leq 441$

第五章　大数定理与中心极限定理

练习一 $P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

1．设 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，则由契比雪夫不等式有：

$P(|X-\mu|<3\sigma)\geq$ $1-\frac{D(X)}{(3\sigma)^2}=1-\frac{\sigma^2}{9\sigma^2}=\frac{8}{9}$

2．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从参数 $\lambda=3$ 的泊松分布，试证明：当 n 趋向于无穷大时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于12。

3．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且同分布，已知 $E(X_1^k)=a_k, k=1,2,3,4$。

证明：当 n 充分大时，$Z_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 近似服从正态分布，并指出其分布参数。

第六章　样本及抽样分布

练习一

1．自总体 X 随机地抽取一容量为 5 的样本为 8,2,5,3,7,求样本均值 $\bar{x}$ 和样本方差 S^2 及经验分布函数 $F_5(x)$。

$$\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{1}{5}(8+2+5+3+7) = 5$$

S^2 观察值 $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

$$= \frac{1}{4}(3^2+3^2+0+2^2+2^2) = 6.5$$

$$F_5(x) = \begin{cases} 0, & x<2 \\ \frac{1}{5}, & 2\le x<3 \\ \frac{2}{5}, & 3\le x<5 \\ \frac{3}{5}, & 5\le x<7 \\ \frac{4}{5}, & 7\le x<8 \\ 1, & x\ge 8 \end{cases}$$

2．在总体 $X\sim N(80,20^2)$ 中随机地抽取一容量为 100 的简单随机样本，求概率 $P\{|\overline{X}-80|<3\}$。

$X\sim N(80,20^2) \Rightarrow E(X)=80,\ D(X)=400$

$E(\bar{X}) = E(X) = 80,\quad D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{400}{100} = 4$

$\Rightarrow \bar{X}\sim N(80,2^2),\quad \frac{\bar{X}-80}{2}\sim N(0,1)$

$P\{|\bar{X}-80|<3\} = P\{|\frac{\bar{X}-80}{2}|<\frac{3}{2}\}$

$= 2\Phi(1.5)-1 = 2\times 0.9332-1$

$= 0.8664$

3．在总体 $X\sim N(12,4)$ 中随机地抽取一容量为 5 的简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_5$。

（1）求概率 $P\{|\overline{X}-12|>1\}$；

$E(\bar{X}) = E(X) = 12,\quad D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{4}{5}$，∴ $\bar{X}\sim N(12,(\frac{2}{\sqrt{5}})^2)$

$P\{|\bar{X}-12|>1\} = P(\bar{X}-12>1) + P(\bar{X}-12<-1)$

$= P(\frac{\bar{X}-12}{2/\sqrt{5}} > \frac{\sqrt{5}}{2}) + P(\frac{\bar{X}-12}{2/\sqrt{5}} < -\frac{\sqrt{5}}{2})$

$= 2(1-\Phi(\frac{\sqrt{5}}{2})) \approx 2(1-\Phi(1.12)) = 2\times(1-0.8686) = 0.2628$

（2）求概率 $P\{\max(X_1,X_2,\cdots,X_5)>15\}$；

$X_1,X_2,\cdots,X_5$ 与总体 X 同分布，i.e. $X_i\sim N(12,4)$，且相互独立

$P\{\max\{X_1,\cdots,X_5\}>15\} = 1-P\{\max(X_1,\cdots,X_5)\le 15\}$

$= 1-F_X^5(15)$

$= 1-\Phi^5(\frac{15-12}{2}) = 1-\Phi^5(1.5) \approx 1-0.7077 = 0.2923$

（3）求概率 $P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_5)<10\}$。

$P\{\min(X_1,\cdots,X_5)<10\}$

$= 1-(1-F_X(10))^5 = 1-(1-\Phi(\frac{10-12}{2}))^5$

$= 1-\Phi^5(1) \approx 1-0.4215 = 0.5785$

4．在总体 $X\sim\chi^2(n)$ 中随机地抽取一容量为 16 的简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$，$\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差，求 $E(\overline{X}),D(\overline{X}),E(S^2)$。

$X\sim\chi^2(n),\quad E(X)=n,\quad D(X)=2n$

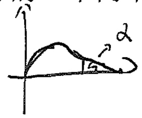
$E(\bar{X}) = E(X) = n$

$D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{16} = \frac{2n}{16} = \frac{n}{8}$

$E(S^2) = D(X) = 2n$

练习二

1．设 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 是来自正态总体 $X\sim N(0,0.3^2)$ 的一个简单随机样本，求概率 $P\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\}$。



$X_i\sim N(0,0.3^2)\Rightarrow Y_i=\frac{X_i-0}{0.3}\sim N(0,1)$

$\Rightarrow Y=\sum_{i=1}^{10}Y_i^2=\frac{1}{0.09}\sum_{i=1}^{10}X_i^2\sim\chi^2(10)$

$P(\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44)=P(\frac{1}{0.09}\sum_{i=1}^{10}X_i^2>16)=P(Y>16)$

由 χ^2 分布表，$\chi^2_\alpha(10)=16\approx15.987$，$n=10\Rightarrow\alpha=0.1$

2．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自参数为 λ 的泊松总体 $X\sim\pi(\lambda)$ 的一个简单随机样本，$\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差，求 $E(\overline{X}),D(\overline{X}),E(S^2)$。

$X\sim\pi(\lambda)$，则 $E(X)=D(X)=\lambda$

$E(\bar{X})=E(X)=\lambda$

$D(\bar{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{\lambda}{n}$

$E(S^2)=D(X)=\lambda$

$E(X_i)=0,\ D(X_i)=2$，　具有独立性

3.(1)设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $X\sim N(0,2)$ 的一个简单随机样本，

$X_i\sim N(0,2)$

试求正常数 a、b 使得 $Y=a(X_1+X_2)^2+b(2X_3-X_4)^2$ 服从 χ^2 分布，并指出它的自由度；

$\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b=\frac{1}{10}\end{cases}$

设 $Y_1=\sqrt{a}(X_1+X_2)$，$Y_2=\sqrt{b}(2X_3-X_4)$

由题，Y_1,Y_2 相互独立，且 $Y_1,Y_2\sim N(0,1)$

$Y=Y_1^2+Y_2^2\sim\chi^2(2)$，$\therefore D(Y_1)=D(Y_2)=1$

$D(Y_1)=D(\sqrt{a}(X_1+X_2))=a(D(X_1)+D(X_2))=4a=1$

$D(Y_2)=D(\sqrt{b}(2X_3-X_4))=4bD(X_3)+bD(X_4)=10b=1$

（2）设 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 是来自正态总体 $X\sim N(0,1)$ 的一个简单随机样本，试给出常数 d 使得 $d\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$ 服从 t 分布，并指出它的自由度。

由t分布的定义，只要找一个服从标准正态分布的随机变量作分子，找一个与分子独立的 $\chi^2(n)$ 分布作分母

即构造自由度为n的t分布 $t(n)$

$X_i\sim N(0,1)$　$\therefore X_1+X_2\sim N(0,2)$，　$\therefore\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$

$X_3^2+X_4^2+X_5^2\sim\chi^2(3)$　　$\therefore d=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\therefore\frac{\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{3}(X_3^2+X_4^2+X_5^2)}}\sim t(3)$　　$n=3$

4．设 $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 是来自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本，这里 μ,σ^2 均为未知，$\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差。

（1）求 $P\{\frac{S^2}{\sigma^2}\le2.041\}$；　$n=16$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$　i.e.　$\frac{15S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(15)$

$\therefore P\{\frac{S^2}{\sigma^2}\le2.041\}=P\{\frac{15S^2}{\sigma^2}\le30.615\}$

$\approx1-0.01=0.99$

（2）若 σ^2 已知，求 $D(S^2)$。

$D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}=\frac{2\sigma^4}{15}$